

# MATEMATIKA

## I. SVRHA I CILJ

Zamisa o programa zasniva se na ciljevima i zadacima nastave matematike u srednjoj školi.

Najvažniji ciljevi nastave matematike su:

1. Stjecanje temeljnih matematičkih znanja nužnih za nastavak daljnje izobrazbe, praćenje suvremenoga društveno-gospodarskoga i znanstveno-tehnološkoga razvoja i buduće djelatnosti.
2. Razvijanje logičnoga mišljenja i zaključivanja, matematičke intuicije, mašte i stvaralaštva.
3. Stjecanje navika i umijeća, kao što su sistematičnost, ustrajnost, preciznost i postojnost.
4. Postupno usvajanje metode matematičkoga mišljenja koje se očituje u preciznom funkcioniranju pojmova, logičnom zaključivanju i algoritamskom rješavanju problema.
5. Stjecanje sposobnosti matematičkoga oblikovanja i predočivanja problema na znakovima i jeziku matematike, naglašeno u grafičkom smislu.

## II. PROGRAMSKA GRAĐA

### Prvi razred

(opća, jezična i klasična gimnazija)

### 1. ZADACI

Učenici prvoga razreda trebaju:

- svladati osnovna znanja vezana uz realne brojeve u strukturalnom smislu, strogo razlikovati svojstva prirodnih, cijelih, racionalnih i iracionalnih brojeva,
- računске radnje s realnim brojevima svladati do razine vještine; tu se uglavnom misli na operacije s razlomcima i potencijama,
- naučiti rješavati linearne jednadžbe, nejednadžbe i probleme prvoga stupnja,
- ovladati snalaženjem u koordinatnom sustavu te znati interpretirati grafički prikaz linearne funkcije,
- svladati vještinu zbrajanja, oduzimanja, umnoženja i dijeljenja polinoma i racionalnih funkcija,
- naučiti operacije s korijenima i potencijama s racionalnim eksponentom,
- uz geometriju ravnine, naučiti pojmove i čimbenike vezane uz sukladnost i sličnost, kružnicu, krug i pravilne poligone.

### 2. SADRŽAJI

#### 2.1. SKUP REALNIH BROJEVA

Skup realnih brojeva. Uredaj na skupu racionalnih brojeva. Smještanje racionalnih brojeva na pravcu. Skup realnih brojeva. Brojevni pravac.

Osnovna svojstva zbrajanja i množenja realnih brojeva. vadrat i kub binoma. Razlika kvadrata i razlika kubova. astav na faktore. Mjere i višekratnici. Algebarski škratnici. Linearne jednadžbe i problemi 1. stupnja.

#### 2.2. UREĐAJ U SKUPU REALNIH BROJEVA

Uredaj u skupu realnih brojeva. Linearne nejednadžbe i sustavi linearnih nejednadžbi s jednom nepoznicom. Apsolutna vrijednost realnoga broja. Formula za udaljenost točaka na brojevnom pravcu. Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima.

#### 2.3. KOORDINATNI SUSTAV U RAVNINI

Koordinatni sustav u ravnini. Formula za udaljenost dviju točaka u koordinatnom sustavu. Površina trokuta. Polovište dužine. Graf linearne i afine funkcije. Graf funkcije  $f(x) = |x|$ . Sjecište dvaju pravaca i linearni sustavi. Problemi prvoga stupnja s dvije nepoznate.

#### 2.4. SUKLADNOST I SLIČNOST

Sukladnost trokuta. Primjene sukladnosti. Proporcionalnost. Talesov teorem. Sličnost trokuta i primjene. Homotetija. Primjene na geometrijske konstrukcije.

#### 2.5. POLINOMI I RACIONALNE FUNKCIJE

Pojam polinoma. Zbrajanje, oduzimanje i množenje polinoma. Dijeljenje polinoma. Racionalne funkcije.

#### 2.6. POTENCIJE I KORIJENI

Potencije. Računanje s potencijama istih i različitih baza. Korijeni. Iracionalne jednadžbe. Potencije s racionalnim eksponentima.

#### 2.7. KRUŽNICA I KRUG. PRAVILNI POLIGONI

Opseg i površina kruga. Duljina kružnog luka i površina kružnoga isječka. Odnos obodnoga i središnjega kuta kružnice. Talesov teorem. Primjene na geometrijske konstrukcije. Tetivni i tangencijalni četverokuti.

*Napomena:*

U 1. razredu prirodoslovno-matematičke gimnazije treba, za program od 5 sati tjedno, dodati teme I. i III. iz izborne nastave za 2. razred opće gimnazije, a za program od 6 sati tjedno, teme I. - IV. iz izborne nastave za 2. razred opće gimnazije.

### Drugi razred

(opća, jezična i klasična gimnazija)

### 1. ZADACI

Učenici drugoga razreda trebaju:

- znati obrazložiti potrebu proširivanja skupa realnih brojeva,
- svladati računске operacije s kompleksnim brojevima, uključujući prikazivanje kompleksnih brojeva u ravnini,
- ovladati umijećem rješavanja kvadratne jednadžbe i problema drugoga stupnja,
- naučiti primjenjivati kvadratnu funkciju na rješavanje nekih zadataka o ekstremima u geometriji i fizici,
- naučiti svojstva eksponencijalne funkcije i shvatiti njenu vezu s logaritamskom funkcijom,
- svladati uporabu pravila za računanje s logaritmima i izračunavati log  $x$  pomoću tablica ili džepnoga računala,

- trigonometrijske funkcije znati primijeniti na rješavanje pravokutnoga trokuta,
- upoznati međusobne odnose točaka, pravaca i ravnina u prostoru,
- ovladati sposobnošću rješavanja praktičnih zadataka u kojima se zahtijeva raspoznavanje različitih prostornih oblika.

## 2. SADRŽAJ

### 2.1. SKUP KOMPLEKSNII BROJEVA

Kvadratna jednadžba. Formula za rješavanje kvadratne jednadžbe. Skup kompleksnih brojeva. Apsolutna vrijednost kompleksnoga broja. Dijeljenje kompleksnih brojeva. Prikazivanje kompleksnih brojeva u Gaussovoj ravnini.

### 2.2. KVADRATNA JEDNADŽBA

Rješavanje kvadratnih jednadžbi. Diskriminanta kvadratne jednadžbe. Vietćove formule. Sustav linearne i kvadratne jednadžbe. Problemi drugoga stupnja.

### 2.3. POLINOM DRUGOGA STUPNJA I NJEGOV GRAF

Pojam polinoma drugoga stupnja. Grafovi polinoma  $f(x) = a^2$ ,  $f(x) = a^2 + c$ ,  $f(x) = a(x - x_0)^2 + c$  i  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Zadaci s minimumom i maksimumom. Nultočke polinoma drugoga stupnja i njegov graf. Kvadratne jednadžbe. Presjek pravca i parabole.

### 2.4. TRIGONOMETRIJA PRAVOKUTNOGA TROKUTA

Definicije trigonometrijskih funkcija šiljastoga kuta. Vrijednosti trigonometrijskih funkcija kutova  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ . Tablice vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Osnovne relacije među trigonometrijskim funkcijama. Primjena na pravokutni trokut. Primjena u planimetriji.

### 2.5. EKSPONENCIJALNE I LOGARITAMSKE FUNKCIJE

Izračunavanje potencije  $10^x$ . Eksponencijalna funkcija  $x \rightarrow ax$ . Kompozicija funkcija i pojam inverzne funkcije. Logaritamska funkcija  $x \rightarrow \log_a x$  kao inverzna funkcija eksponencijalne funkcije  $x \rightarrow a^x$ . Formule za logaritme produkta, potencije, kvocijenta i korijena. Izračunavanje logaritama. Eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe. Neke primjene eksponencijalnih funkcija. Osnovni teoremi o eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama.

### 2.6. GEOMETRIJA PROSTORA

Aksiomatika geometrije prostora. Ravnina određena točkom i pravcem. Probodište pravca i ravnine. Ravnina određena s tri nekolinearne točke. Rastav prostora na dva poluprostora. Paralelnost pravaca u prostoru, paralelnost pravca i ravnine i paralelnost dviju ravnina. Okomitost pravca i ravnine, okomitost dvaju mimosmjernih pravaca i okomitost dviju ravnina. Kut pravaca, pravca i ravnine te dviju ravnina. Zajednička normala dvaju pravaca. Najkraća udaljenost dvaju mimosmjernih pravaca. Simetralna ravnina dužine i para ukrštenih ravnina.

### 2.7. POLIEDRI I ROTACIJSKA TIJELA

Pojam poliedra. Kvarar i kocka. Oplošje i volumen kvadra i kocke. Uspravna prizma, oplošje i volumen. Kosa prizma. Volumen kose prizme. Piramida, oplošje i volumen. Krnja piramida, oplošje i volumen. Pravilni poliedri. Valjak, stožac, krnji stožac, kugla, oplošje i volumen. Kombinirani zadaci iz stereometrije.

### Napomena 1:

U 2. razredu *prirodoslovno-matematičke gimnazije* treba za program sa 5 i 6 sati tjedno, iza teme III., dodati temu III. POLINOMI I ALGEBARSKJE JEDNADŽBE Polinomi i pripadne algebarske jednadžbe. Nultočke i korijeni. Izreka osnovnoga teorema algebre. Teorem o dijeljenju polinoma. Djeljivost polinoma linearnim polinomom. Hornerov algoritam i primjene. Bezoutov teorem. Brojevni sustavi algoritmi za prevodenje brojeva iz binarnoga u dekadski sustav i odgovarajući programi. Racionalni korijeni algebarskih jednadžbi i primjena na njihovo rješavanje.

### Napomena 2.

U 2. razredu *jezične i klasične gimnazije* iz programa se ispuštaju teme: Eksponencijalne i logaritamske nejednadžbe. Neke primjene eksponencijalnih funkcija. Osnovni teoremi o eksponencijalnim i logaritamskim funkcijama.

## Treći razred

(opća, jezična i klasična gimnazija)

## 1. ZADACJE

Učenici trećega razreda trebaju:

- naučiti definirati trigonometrijske funkcije kao realne funkcije koristeći brojevu kružnicu te svojstva tih funkcija (periodičnost, parnost i neparnost) proučavati na osnovi njihovih grafova i primjenjivati u rješavanju trigonometrijskih zadataka
- ovladati sposobnošću rješavanja planimetrijskih i stereometrijskih zadataka primjenjujući svojstva trigonometrijskih funkcija kuta te sinusova i kosinusova teorema,
- ovladati umijećem rješavanja trigonometrijskih jednadžbi,
- svladati osnovna znanja iz vektorske algebre i, što je posebno važno, uočiti mogućnosti i snagu vektorske metode u geometrijskim zadacima i problemima,
- znati rješavati osnovne zadatke o pravcu s težištem na pravcu kao skupu nultočaka polinoma prvoga stupnja u dvije varijable,
- naučiti definirati i crtati krivulje drugoga reda na osnovi njihovih metričkih svojstava, a ostale zadatke rješavati na osnovi njihovih pripadnih jednadžbi.

## 2. SADRŽAJI

### 2.1. TRIGONOMETRIJSKE FUNKCIJE

Brojeva kružnica. Definicija trigonometrijskih funkcija. Parnost kosinusa, neparnost sinusa. Periodičnost trigonometrijskih funkcija. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija (Tablice. Uporaba džepnoga računala). Grafički prikaz trigonometrijskih funkcija. Adicione formule. Pretvorba zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak, i obratno. Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.

### 2.2. PRIMJENE TRIGONOMETRIJE U GEOMETRIJI

Primjene trigonometrije pravokutnoga trokuta u planimetriji (ponavljanje). Poučak o sinusima. Poučak o kosinusima. Primjene trigonometrije u planimetriji. Primjene trigonometrije u stereometriji, fizici, tehničari i geodeziji.

### 2.3. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNINI

Vektori. Pojam vektora. Zbrajanje vektora. Množenje vektora realnim brojem. Linearna kombinacija vektora. Linearna zavisnost i nezavisnost vektora. Duljina vektora. Formula za udaljenost točaka u koordinatnom sustavu. Djeljenje dužine u danom omjeru. Skalarni produkt vektora. Okomitost vektora. Eksplicitni, implicitni i segmentni oblik jednadžbe pravca. Kut dvaju pravca (okomitost i paralelnost). Udaljenost točke od pravca. Simetrala kuta. Minimum i maksimum polinoma  $f(x, y) = Ax + By + C$  na konveksnom polinomu i linearno programiranje.

Jednadžba kružnice. Kružnica određena s tri točke. Presjek pravca i kružnice. Tangenta i normala kružnice. Uvjet dodira pravca i kružnice. Elipsa, hiperbola i parabola. Istostrana hiperbola. Tangenta i normala u točki elipse, hiperbole i parabole. Pojam krivulje 2. reda. Presjek pravca i krivulje 2. reda.

#### Napomena 1.

Za prirodoslovno-matematičku gimnaziju dodaju se još ove teme: Parametarske jednadžbe pravca. Pol i polara krivulje 2. reda. Uvjet dodira pravca i krivulje 2. reda. Presjek i kut krivulja 2. reda. Zajedničke tangente. Fokalna svojstva krivulja 2. reda. Direktrise i Papo-Boškovićeva definicija krivulje 2. reda. Translacija koordinatnoga sustava s primjenom na krivulje 2. reda. Tjemene jednadžbe. Osnovne konstrukcije u vezi s krivuljama 2. reda.

#### Napomena 2.

Za program prirodoslovno-matematičke gimnazije od 6 i 7 sati tjedno dodaju se ove teme iz analitičke geometrije prostora: Koordinatni sustav  $E^3$ . Formule za udaljenost dviju točaka, za duljinu vektora i skalarni produkt. Jednadžba sfere. Determinante drugoga i trećega reda i linearni sustavi jednadžbi. Vektorski i mješoviti produkt vektora. Jednadžba ravnine. Jednadžba pravca. Analitička obrada međusobnih položaja pravca i ravnina.

### 4. razred

(opća, jezična i klasična gimnazija)

## 1. ZADACÉ

Učenici četvrtoga razreda trebaju:

svladati osnovna znanja o skupovima brojeva u strukturalnom smislu, strogo razlikovati svojstva prirodnih, cijelih, racionalnih, realnih i kompleksnih brojeva,

znati razlikovati ograničen i neograničen niz te monotono rastući i monotono padajući niz,

naučiti formule za opći član i sumu aritmetičkoga i geometrijskoga niza i primijeniti ih u rješavanju zadataka te odrediti sumu beskonačnoga geometrijskog reda,

znati opisati tok, tj. odrediti područje definicije, nulte točke, područje rasta i pada funkcije te nacrtati graf osnovnih funkcija,

naučiti definiciju derivacije funkcije u točki otvorenoga intervala i na osnovi limesa kvocijenta diferencija odrediti derivacije nekih funkcija,

svladati pravila deriviranja i primijeniti derivacije na ispitivanje toka funkcije,

znati obrazložiti pojam integrala te vezu integrala i primitivne funkcije,

naučiti tablicu integrala i primijeniti integrale na izračunavanje površina i volumena.

## 2. SADRŽAJI

### 2.1. BROJEVI

Prirodni brojevi. Brojevi sustavi. Peanovi aksiomi. Matematička indukcija. Skup cijelih brojeva. Ideja o algebarskim ustrojima. Racionalni brojevi. Gustoća i prebrojivost. Postoje brojevi koji nisu racionalni. Skup realnih brojeva. Skup kompleksnih brojeva. Trigonometrijski zapis kompleksnoga broja. Moivreove formule. Binomne jednadžbe. Osnovni teorem algebre.

### 2.2. NIZOVI

Pojam niza. Zadavanje nizova. Monotoni nizovi. Omeđeni nizovi. Limes niza. Teoremi o limesima. Aritmetički niz. Geometrijski niz. Beskonačni geometrijski red.

### 2.3. FUNKCIJE

Pojam funkcije. Parne i neparne funkcije. Periodične funkcije. Kompozicija funkcija. Inverzna funkcija. Područje definicije funkcije. Pojam funkcionalne jednadžbe.

### 2.4. PROBLEM IZRAČUNAVANJA POVRŠINE

Arhimedova metoda ekshauzije. Površina kruga. Površina trokuta. Površina ispod luka parabole. Logaritamska krivulja i površina ispod luka krivulje  $y=1/x$ . Površina ispod grafa monotone funkcije.

### 2.5. DERIVACIJA

Problem brzine i problem tangente. Tangenta na graf polinoma trećega stupnja. Tangenta na krivulju. Derivacija funkcije u točki. Derivacija zbroya, razlike, umnoška i kvocijenta funkcija. Derivacija složene funkcije. Derivacije trigonometrijskih funkcija. Derivacija inverzne funkcije. Derivacija eksponencijalnih i logaritamskih funkcija. Neke primjene derivacija.

### 2.6. INTEGRAL I PRIMITIVNA FUNKCIJA

Integral funkcije. Primitivna funkcija. Newton-Leibnizova formula. Primjena integrala na izračunavanje površina. Volumeni rotacijskih tijela. Diferencijalne jednadžbe za prirodni rast, odnosno pad. Primjena derivacija i integrala u fizici.

#### Napomena:

U programu za prirodoslovno-matematičku gimnaziju treba dodati u poglavlju V.: Derivacije višega reda. Taylorov razvoj polinoma. Aproksimacija funkcije pomoću Taylorova polinoma. Ekstremi polinoma II. i III. stupnja. Lokalni ekstremi funkcija pomoću derivacije drugoga reda. Monotone funkcije i derivacija. Kriterij za stroge lokalne ekstreme funkcije pomoću prve derivacije. Primjena derivacije u grafičkom prikazivanju funkcija.

### 2.7. OSNOVNI POJMOVI VJEROJATNOSTI

#### 1. Slučajni pokusi.

Slučajni događaji. Prostor osnovnih događaja. Operacije s događajima. Vjerojatnost kao relativna frekvencija. Klasična definicija vjerojatnosti.

#### 2. Vjerojatnosni prostor.

Definicija i osnovna svojstva vjerojatnosti. Konstrukcija vjerojatnosnoga prostora. Razni načini zadavanja vjerojatnosti. Geometrijske vjerojatnosti.

#### 3. Kombinatorika.

Osnovna načela prebrajanja. Varijacije i permutacije. Kombinacije. Binomni i polinomijalni teorem. Primjena kombinatorike na osnovne probleme iz vjerojatnosti.

**4. Uvjetna vjerojatnost.**

Nezavisnost uvjetne vjerojatnosti. Nezavisnost događaja. Formula potpune vjerojatnosti. Bayesova formula.

*Napomena 1.:*

Za program prirodoslovno-matematičke gimnazije (6 i 7 sati tjedno) dodaju se ove teme:

Bernoullijeva shema. Diskretne slučajne veličine i zakoni njihovih razdioba. Normalna razdioba. Zakon velikih brojeva. Očekivanje slučajne razdiobe. Sređivanje statističkih podataka. Linearna korelacija.  $\chi^2$ -test.

**III. DIDAKTIČKE UPUTE**

Matematika se, kao i druge znanosti, razvija i obogaćuje novim spoznajama. Stvaraju se nove matematičke teorije i otkrivanju novi pristupi u rješavanju problema. Nastava svakoga predmeta, pa i matematike, u stanovitom je zaostatku za razvojem suvremene znanosti i valja je nužno povremeno usklađivati s novim dostignućima.

U posljednjih četvrt stoljeća svijet je zahvaćen "valom modernizacije". U tome se pretjeralo, pa su se uskoro pojavile i posljedice. Pokazalo se, naime, da se znanje usvajalo formalizirano te je došlo do pada stvaralaštva.

Stoga su mnoge zemlje tijekom zadnjih godina mijenjale svoje nastavne programe. Ti su novi programi postali mnogo "neambiciozniji", tj. prišlo se mnogo umjerenijoj modernizaciji s ciljem da se nađe kompromis između tradicionalnih i suvremenih stajališta u nastavi matematike.

Glavna je značajka tih promjena u tome da se izbače iz programa preostali sadržaji za čije se uvođenje na razini srednje škole nije raspolagalo dovoljnim brojem konkretnih primjera kojima bi se shvatila svrha uvođenja. Osim toga, dijelovi novih sadržaja (relacije i ustroji) bili su neprimjereni mogućnosti i dobi učenika.

Drugi važan trenutak u tim reformama je nastojanje da se u nastavu matematike unesu sadržaji, koji se danas primjenjuju i prijeko su potrebiti (algoritmi, linearno programiranje i statistika).

Tako su u mnogim zemljama izmijenjeni programi nastave matematike, a izrađeni su na ovim načelima:

1. Program matematike u srednjoj školi treba dati osnovna znanja, koja su nužna svim učenicima neovisno o izboru njihova budućeg zanimanja.
2. Opseg, sadržaj i metode nastave treba dovesti u najpovoljniji odnos s dobi učenika.
3. Treba razvijati i produbljivati matematičko mišljenje učenika i osposobljavati ih za osmišljavanje i rješavanje raznih praktičnih problema.

Program matematike za gimnazije izgrađen je u skladu s ovim načelima i ciljevima nastave matematike. Pritom je uvažen linearno-spiralni način programiranja. Taj oblik programiranja osigurava neprekinutost učenja matematike, tj. znanja matematike stalno se proširuju i produbljuju.

U nastavi je potrebno primjenjivati dostignuća pedagogije, psihologije i metodike nastave matematike te rabiti suvremenu nastavnu tehnologiju.